Ministerul Educaţiei şi Cercetării

Olimpiada Naţională de Matematică 2007

Etapa judeţeană şi a Municipiului Bucureşti

3 martie 2007

CLASA A IX-A, SOLUTII SI BAREMURI

Subiectul 1. Varianta generalizată Fie $k \in \mathbb{N}^*$. Spunem că o funcţie $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ are proprietatea $(\mathcal{P})$ dacă pentru orice $y \in \mathbb{N}$ ecuaţia $f(x) = y$ are exact k soluţii.
a) Să se arate că există o infinitate de funcţii cu proprietatea $(\mathcal{P})$;
b) Să se determine funcţiile monotone cu proprietatea $(\mathcal{P})$;
c) Să se determine dacă pentru $k > 1$ există funcţii monotone $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ cu proprietatea $(\mathcal{P})$.

Soluţie. a) Fie $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijectivă, şi fie $f_\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definită prin $f_\sigma(x) = \sigma(\lfloor \frac{x}{k} \rfloor)$. Este clar că funcţiile f_σ au proprietatea $(\mathcal{P})$, iar mulţimea lor este infinită (chiar nenumărabilă). $\square$

b) Dacă f este descrescătoare, şirul $(f(n))_{n\geq 0}$ devine staţionar, contrazicând $(\mathcal{P})$. Deci căutăm f crescătoare. Dar atunci primele k valori ale şirului $(f(n))_{n\geq 0}$ trebuie să fie 0, următoarele k trebuie să fie 1, ş.a.m.d. Atunci singura posibilitate rămâne $f(x) = f_{\mathrm{id}}(x) = \lfloor \frac{x}{k} \rfloor$. $\square$

c) Dacă $f(x_1) = f(x_2) = y$, $x_1 \neq x_2$, cum între x_1 şi x_2 există o infinitate de numere raţionale x (de exemplu luând medii aritmetice), şi f este monotonă, rezultă $f(x) = y$ pentru toate aceste valori x, contrazicând $(\mathcal{P})$, deci nu există astfel de funcţii. $\square$

Pentru o familie infinită de funcţii cu proprietatea $(\mathcal{P})$ .... 2p.
Pentru analiza cazului f descrescătoare .... 1p.
Pentru determinarea funcţiei unice $\lfloor \frac{x}{k} \rfloor$ .... 2p.
Pentru răspuns negativ la punctul c) .... 2p.

Subiectul 2. Fie triunghiul ABC şi punctele $M \in (AB)$, $N \in (BC)$, $P \in (CA)$, $R \in (MN)$, $S \in (NP)$, $T \in (PM)$, astfel încât

$$\frac{AM}{MB} = \frac{BN}{NC} = \frac{CP}{PA} = \lambda,\ \frac{MR}{RN} = \frac{NS}{SP} = \frac{PT}{TM} = 1 - \lambda,\ \lambda \in (0, 1).$$

a) Să se demonstreze că triunghiul STR este asemenea cu triunghiul ABC;

b) Să se determine valoarea parametrului λ astfel încât aria triunghiului STR să fie minimă.

Soluţie. a) Notând cu litere **grase** vectorii determinaţi de segmente

$$\mathbf{RT} = \mathbf{RM} + \mathbf{MT} = \frac{1-\lambda}{2-\lambda}\mathbf{NM} + \frac{1}{2-\lambda}\mathbf{MP}, \text{ deci}$$

$$\mathbf{RT} = \frac{1-\lambda}{2-\lambda}(\mathbf{NB} + \mathbf{BM}) + \frac{1}{2-\lambda}(\mathbf{MA} + \mathbf{AP}).$$

Efectuând calculele de rigoare, $\mathbf{RT} = \rho\mathbf{BC}$, $\mathbf{TS} = \rho\mathbf{AB}$, $\mathbf{SR} = \rho\mathbf{CA}$, deci $\mathbf{RT}, \mathbf{TS}, \mathbf{SR}$ sunt paralele respectiv cu $\mathbf{BC}, \mathbf{AB}, \mathbf{CA}$, triunghiurile STR şi ABC sunt asemenea, şi raportul de asemănare este $\rho = \frac{1-\lambda+\lambda^2}{2+\lambda-\lambda^2} > 0$ pentru $\lambda \in (0, 1)$. $\square$

b) Deoarece raportul ariilor celor două triunghiuri este ρ^2, aria triunghiului STR va fi minimă când valoarea lui ρ este minimă. Din relaţia pentru ρ rezultă $(1+\rho)\lambda^2 - (1+\rho)\lambda + 1 - 2\rho = 0$. Discriminantul este $\Delta = 3(1+\rho)(3\rho - 1)$ şi condiţia $\Delta \geq 0$ (pentru existenţa lui λ) revine la $\rho \notin (-1, \frac{1}{3})$, deci valoarea minimă a lui ρ este $\frac{1}{3}$, pentru care $\lambda = \frac{1}{2}$. $\square$

Pentru calculul vectorial al laturilor ΔSTR .... 4p.
Pentru obţinerea valorii corecte pentru ρ .... 1p.
Pentru determinarea valorii λ la punctul b) .... 2p.

Subiectul 3. Să se determine funcţiile $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ pentru care

$$x^2 + f(y) \text{ divide } f(x)^2 + y$$

pentru orice $x, y \in \mathbb{N}^*$.

Soluţie. . Pentru $x = y = 1$ obţinem

$$\frac{f(1)^2 + 1}{1 + f(1)} = f(1) - 1 + \frac{2}{1 + f(1)} \in \mathbb{N}^*,$$

deci $f(1) = 1$. Acum, deoarece $x^2 + f(y)$ divide $f(x)^2 + y$, rezultă că

$$x^2 + f(y) \leq f(x)^2 + y.$$

Pentru $y = 1$, $f(x)^2 - x^2 \geq f(1) - 1 = 0$, aşadar, pentru orice $x \in \mathbb{N}^*$,
$f(x) \geq x$. (1)
Pentru $x = 1$, obţinem $1 + y \geq 1 + f(y)$, aşadar, pentru orice $y \in \mathbb{N}^*$,
$f(y) \leq y$. (2)
Din (1) şi (2) rezultă că singura soluţie f este funcţia *identitate* $\mathrm{id}(n) \equiv n$, şi condiţia este verificată trivial prin $x^2 + f(y) = f(x)^2 + y = x^2 + y$. $\square$

Pentru valoarea $f(1) = 1$ .... 1p.

Pentru relaţia $f(x) \geq x$ ....3p.
Pentru relaţia $f(x) \leq x$ ....3p.

Subiectul 4. Fie trei vectori coplanari $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$, fiecare de modúl 1.
a) Să se demonstreze că putem alege semnele $+$, $-$, astfel încât să avem $| \pm \mathbf{u} \pm \mathbf{v} \pm \mathbf{w}| \leq 1$;
b) Să se dea un exemplu de trei vectori $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$, pentru care oricum am alege semnele $+$, $-$, să avem $| \pm \mathbf{u} \pm \mathbf{v} \pm \mathbf{w}| \geq 1$.

Soluţie. Considerăm toţi vectorii *legaţi* în originea O a unui sistem de coordonate.

a) Dacă pentru oricare doi dintre vectorii daţi, fie ei $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ avem $\mathbf{x} = \pm \mathbf{y}$, concluzia este clară. Putem deci presupune, în cele ce urmează, contrariul acestui fapt.

Soluţia 1. Vârfurile vectorilor $\mathbf{u}+\mathbf{v}, \mathbf{u}-\mathbf{v}, -\mathbf{u}-\mathbf{v}$ şi $-\mathbf{u}+\mathbf{v}$ formează un romb de latură 2. Discurile de rază 1 centrate în aceste vârfuri acoperă în mod evident circumferinţa cercului de rază 1 centrat în O, deci vârful vectorului $\mathbf{w}$ este la distanţă cel mult 1 de unul din aceste vârfuri. $\square$

Soluţia 2. Dacă vârfurile vectorilor daţi nu formează un triunghi ascuţitunghic, ele vor fi conţinute pe un semicerc al cercului de rază 1 centrat în O, şi atunci, considerând vectorul opus celui cu vârful situat între celelalte două, vârful său va forma cu cele două un triunghi ascuţitunghic. Fie atunci $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ reprezentând $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$, respectiv $-\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ sau $\mathbf{u}, -\mathbf{v}, \mathbf{w}$ sau $\mathbf{u}, \mathbf{v}, -\mathbf{w}$, astfel încât vârfurile lor formează un triunghi ascuţitunghic XYZ. Să considerăm vectorul $\mathbf{h} = \mathbf{x}+\mathbf{y}+\mathbf{z}$. Avem

$$< \mathbf{h}-\mathbf{x}, \mathbf{y}-\mathbf{z} >=< \mathbf{y}+\mathbf{z}, \mathbf{y}-\mathbf{z} >= |\mathbf{y}|^2 - |\mathbf{z}|^2 = 0$$

şi celelalte două relaţii similare, deci $\mathbf{h}$ corespunde ortocentrului H al triunghiului XYZ. Dar atunci $H \in \Delta XYZ$ şi deci $OH = |\mathbf{h}| \leq 1$. $\square$

Finalmente, o soluţie pur vectorială (fără justificări geometrice) poate fi dată, dar va trebui să conţină consideraţii precise şi detaliate, pentru a suplini lipsa argumentului geometric. $\square$

b) Un exemplu îl constituie $\mathbf{u} = (1,0), \mathbf{v} = (0,1), \mathbf{w} = (0,-1)$. $\square$

Pentru analiza sumelor algebrice a doi vectori ....2p.
Pentru argumentarea corectă a alegerii semnelor ....4p.
Pentru un exemplu la punctul b) ....1p.